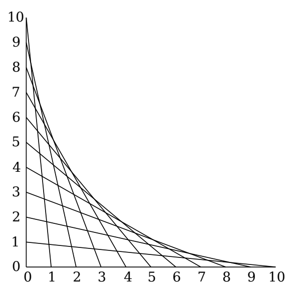
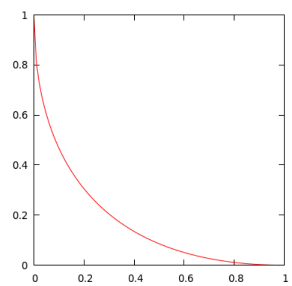
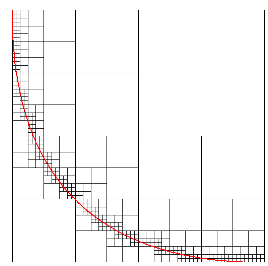
Egy görbe felkutatása

Salvi Péter

2018. március 11.







Ki ne rajzolt volna gyerekkorában a baloldalihoz hasonló ábrákat? Látszik, hogy az egyenes szakaszok egy folytonos görbét rajzolnak ki, de mi ez a görbe? Az alábbiakban leírom, hogy én hogyan találtam meg erre a kérdésre a választ – valószínűleg van sokkal egyszerűbb módszer is, de talán tanulságos.

Legyen a vonalak száma n. Ekkor a szakaszok egyenlete

$$L_k(t) = ((1-t)(n-k+1), tk), \quad k = 1 \dots n,\ t \in [0,1]. \tag{1}$$

Az ábrából látszik, hogy a görbét alkotó pontok mindig az L_i és L_{i+1} szakaszok metszéspontjai ($i = 1 \dots n-1$). Ezeknek a képletét könnyen ki tudjuk számolni, ha felírjuk az egyenlőséget koordinátánként:

$$(1-t)(n-k+1) = (1-u)(n-k), \tag{2}$$

$$tk = u(k+1). \tag{3}$$

Ez alapján

$$u = 1 - (1-t)\cdot\frac{n-k+1}{n-k} = \frac{t(n-k+1)-1}{n-k} \tag{4}$$

és behelyettesítve

$$t = \frac{t(n-k+1)(k+1)-k-1}{k(n-k)} = \frac{t(nk+n-k^2+1)-k-1}{k(n-k)} \tag{5}$$

$$= t + \frac{n+1}{k(n-k)}t - \frac{k+1}{k(n-k)}, \tag{6}$$

amiből

$$t = \frac{k+1}{k(n-k)}\cdot\frac{k(n-k)}{n+1} = \frac{k+1}{n+1}. \tag{7}$$

Ez alapján a pontok képlete

$$\left(\frac{n-k}{n+1}(n-k+1), \frac{k+1}{n+1}k\right). \tag{8}$$

Mivel egy olyan kifejezést szeretnénk kapni, aminek a mérete nem függ n-től, ezért valahogyan normalizálni kéne. Nézzük meg a szimmetrikus esetet, tehát amikor $n = 2k$:

$$\left(\frac{k(k+1)}{2k+1}, \frac{k(k+1)}{2k+1}\right) = \left(\frac{n(n+2)}{4(n+1)}, \frac{n(n+2)}{4(n+1)}\right) = c_n\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \tag{9}$$

ahol $c_n = n + \frac{n}{n+1}$. Az az intuíció, hogy ez a pont pontosan rajta van az ideális görbén, a pozíciója tehát fix. Azt szeretnénk, hogy ez n-től független legyen, logikusnak tűnik ezért c_n-nel leosztani. Így a pontok új egyenlete

$$\left(\frac{n-k}{n+1}(n-k+1)\frac{(n+1)}{n(n+2)}, \frac{k+1}{n+1}k\frac{(n+1)}{n(n+2)}\right) \tag{10}$$

lesz, ami tovább egyszerűsíthető erre a képletre:

$$\left(\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n+2)}, \frac{k(k+1)}{n(n+2)}\right). \tag{11}$$

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen pontokat kapunk akkor, amikor n tart a végtelenbe. Legyen $k = un$ ($u \in [0,1]$), ekkor

$$C(u) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-u)^2n^2 + (1-u)n}{n^2+2n}, \frac{u^2n^2+un}{n^2+2n}\right) \tag{12}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-u)^2 + (1-u)/n}{1+2/n}, \frac{u^2+u/n}{1+2/n}\right) = \left((1-u)^2, u^2\right) \tag{13}$$

lesz a folytonos görbe parametrikus egyenlete. Az y koordinátát az x koordinátával kifejezve megkapjuk a görbe függvény alakját is:

$$u^2 = \left(1 - \sqrt{(1-u)^2}\right)^2, \tag{14}$$

tehát

$$x \mapsto (1-\sqrt{x})^2, \quad x \in [0,1]. \tag{15}$$

Kis átalakítással implicit alakban is megkapható:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad \text{vagy} \quad x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0, \tag{16}$$

amiből látszik, hogy ez egy parabola. A Bézier kontrollpontok a végpontok és az origó, tehát $(1,0)$, $(0,0)$ és $(0,1)$, illetve az eredeti felírásban ezeknek c_n-szerese.

Érdemes megfigyelni, hogy az eredeti diszkrét ábra pontjai csak közelítései a görbének, de nincsenek pontosan rajta – a szimmetrikus $n = 2k$ eset kivételével, ami mindig az $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ metszéspontot adja. (Ha c_n helyett n-el normalizálunk, akkor ugyanezt a görbét kapjuk, de a végpontok maradnak helyben, viszont úgy sokkal kevésbé lesz pontos a közelítés.)